



TITLE:

演算子値ランジュバン方程式による流体理論における数値解析(基研長期研究会「進化の力学への場の理論的アプローチ」報告,研究会報告)

AUTHOR(S):

水谷, 雅志; 室谷, 心; 並木, 美喜雄; 伊達, 伸

---

CITATION:

水谷, 雅志 ...[et al]. 演算子値ランジュバン方程式による流体理論における数値解析(基研長期研究会「進化の力学への場の理論的アプローチ」報告,研究会報告). 物性研究 1988, 51(2): 105-111

ISSUE DATE:

1988-11-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/93511>

RIGHT:

- C. E. Porter, Phys. Today **16**, 26 (1963)
- 3) M. Mizutani, S. Muroya and M. Namiki, WU-HEP-87-6
- 4) 例えば R. F. Streater J. Phys. A : Math. Gen. **15** 1477 (1982);  
H. Hasegawa et al. J. Phys. A : Math. Gen. **18** L123 (1985) など
- 5) R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan **26** Suppl. 1 (1969)
- 6) M. Namiki and C. Iso, Prog. Theor. Phys. **18** 591 (1957)
- 7) 中島貞雄, 物性論研究 **88**, 45 (1955); **102**, 24 (1956);  
R. Kubo, M. Yokota and S. Nakajima, J. Phys. Soc. Japan **12**, 1203 (1957);  
D. N. Zubarev, Nonequilibrium Statistical Thermodynamics, Plenum, New York, 1979.
- 8) C. Iso, K. Mori and M. Namiki, Prog. Theor. Phys. **22**, 403 (1959)

## 演算子値ランジュバン方程式による流体理論 における数値解析

早大・理工 水谷雅志, 室谷 心, 並木美喜雄

Universidad de Santiago de Compostela 伊達 伸

本研究会における並木報告<sup>1)</sup>(以後[1]と記す)に述べられている, 量子論的ランジュバン方程式にもとづく流体モデルの数値解析について報告する。

[1]に述べられているように, 我々は現象論として流体モデルを採り, 現象論と基礎理論との橋渡しとして, 量子論的ランジュバン方程式を設定した。ここでは, インプットパラメーター  $E(k, \omega)$  を適当に選ぶことにより熱力学的量に相転移らしき振舞を与え, さらに流体方程式を解くことにより, クォーク・グルーオンプラズマ相の時空発展を議論する。

### 1. $\epsilon$ と $\gamma$ に対する現象論的モデル

簡単なモデルとして  $\omega - E(k, \omega) = 0$  の解が1つしかない場合を考える。その場合, [1]の(4-19)より熱力学的量は,

$$\left. \begin{aligned} E(T) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk \epsilon(k) n(\epsilon(k), T) \\ P(T) &= \frac{1}{6\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk \frac{k^2}{\epsilon(k)} n(\epsilon(k), T) \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

$$S(T) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk [(1 + J_0(k, T)) \ln(1 + J_0(k, T)) - J_0(k, T) \ln J_0(k, T)]$$

$$J_0(k, T) = n(\epsilon(k), T)$$

と書くことができる。また輸送係数は[1]の(4-21)より

$$\left. \begin{aligned} \kappa(T) &= \frac{1}{3\pi^2 T} \int_0^\infty k^2 dk \frac{1}{r(k)} k^2 n(\epsilon(k), T) [1 + n(\epsilon(k), T)] \\ \eta_{(s)}(T) &= \frac{2}{15\pi^2 T} \int_0^\infty k^2 dk \frac{1}{r(k)} \frac{k^4}{\epsilon^2(k)} n(\epsilon(k), T) [1 + n(\epsilon(k), T)] \\ \eta_{(v)}(T) &= \frac{1}{\pi^2 T} \int_0^\infty k^2 dk \frac{1}{r(k)} \left[ \frac{k^2}{3\epsilon(k)} - \frac{\partial P(T)}{\partial E(T)} \epsilon(k) \right]^2 \\ &\quad \times n(\epsilon(k), T) [1 + n(\epsilon(k), T)] \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

となる。これらの表式から、高温極限で  $\epsilon(k) \rightarrow k$  となることを仮定すれば、

$$E(T) \longrightarrow E_{SB}(T) = \frac{\pi^2}{30} T^4$$

$$P(T) \longrightarrow \frac{1}{3} E(T)$$

$$S(T) \longrightarrow S_{SB}(T) = \frac{2\pi^2}{45} T^3 \quad (1-3)$$

$$\frac{\kappa(T)}{\eta_{(s)}(T)} \longrightarrow \frac{5}{2}$$

$$\eta_{(v)}(T) \longrightarrow 0$$

が得られる。第一式はステファン・ボルツマンの法則であり、第二式は音速が  $1/\sqrt{3}$  になることを表わす。最後の式は、状態方程式が  $E(T) = 3P(T)$  となった場合の重要な結果である。<sup>2)</sup>

さて、 $\epsilon(k)$  と  $r(k)$  に対する簡単な現象論的モデルとして

$$\epsilon(k) = \sqrt{k^2 + M^2} \frac{1 - \tanh \frac{T - T_c}{d}}{2} + k \frac{1 + \tanh \frac{T - T_c}{d}}{2} \quad (1-4)$$

$$r(k) = ck$$

を導入しよう。 $T_c$  を中心とする幅  $d$  の間で、相転移らしき振舞が現われることを期待している。 $d, M, c$  がこのモデルのパラメーターである。 $T_c$  が相転移点温度のつもりである。 $\epsilon(k)$  の温度依存性は、高温で

ステファン・ボルツマンの法則が成り立つように、すなわち、 $\varepsilon(k) \rightarrow k$  となるように決めた。また  $\gamma(k)$  は、本来  $\varepsilon(k)$  同様温度依存性があるはずだが、簡単のため、高温で  $\eta(s)$  や  $\kappa$  が  $T^3$  に比例するような最も簡単な形を選んだ。M 及び d を適当に選ぶことにより、熱力学的量の温度依存性に、相転移らしき振舞をさせることができる (図 1)。またこのとき、輸送係数の振舞は図 2 のようになる。特に  $\eta(v)$  が相転移点付近で激しい変化をすることに注意してほしい。

また、 $\omega - E(k, \omega) = 0$  の解が 2 つあるとした場合 (2 モード近似) でも、同様の振舞をさせることが可能である ([1] の文献 3) 参照)。

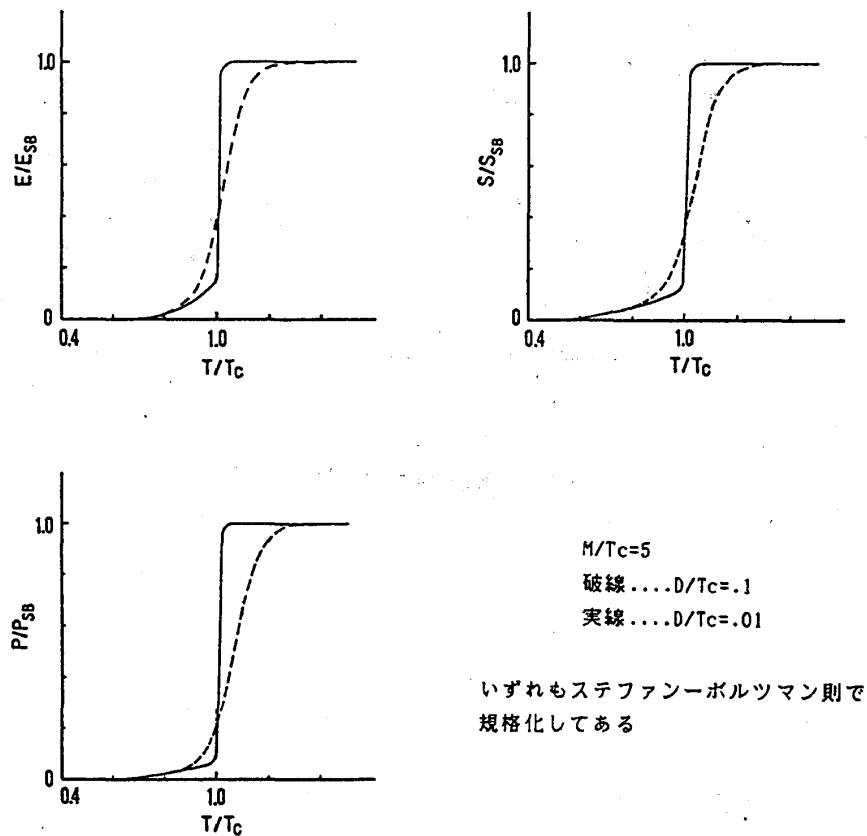


図 1 熱力学的量の温度依存性

## 2. 流体力学的膨張のさいの温度変化

有限温度 QCD の静的な性質は、格子ゲージ理論の数値計算により良く調べられている。しかし高エネルギー重イオン反応など実際の現象の多くは非平衡な現象であり、格子ゲージ理論の結果をそのまま使うことはできない。そこで我々は、§ 1 で議論したように  $\varepsilon(k)$ ,  $\gamma(k)$  を決めることにより、流体の各局所系に相転移の情報を持たせ、その粘性流体に対する流体方程式を解いて、クォーク・グルーオンプラズマ相の時空発展を解析することを目指す。格子ゲージ理論の結果は  $\varepsilon(k)$  と  $\gamma(k)$  のところに入ることができる。

相対論的流体方程式は、4 元局所速度を  $U^\mu$ ,  $U^\mu$  と垂直な方向への射影演算子を  $\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - U^\mu U^\nu$  と

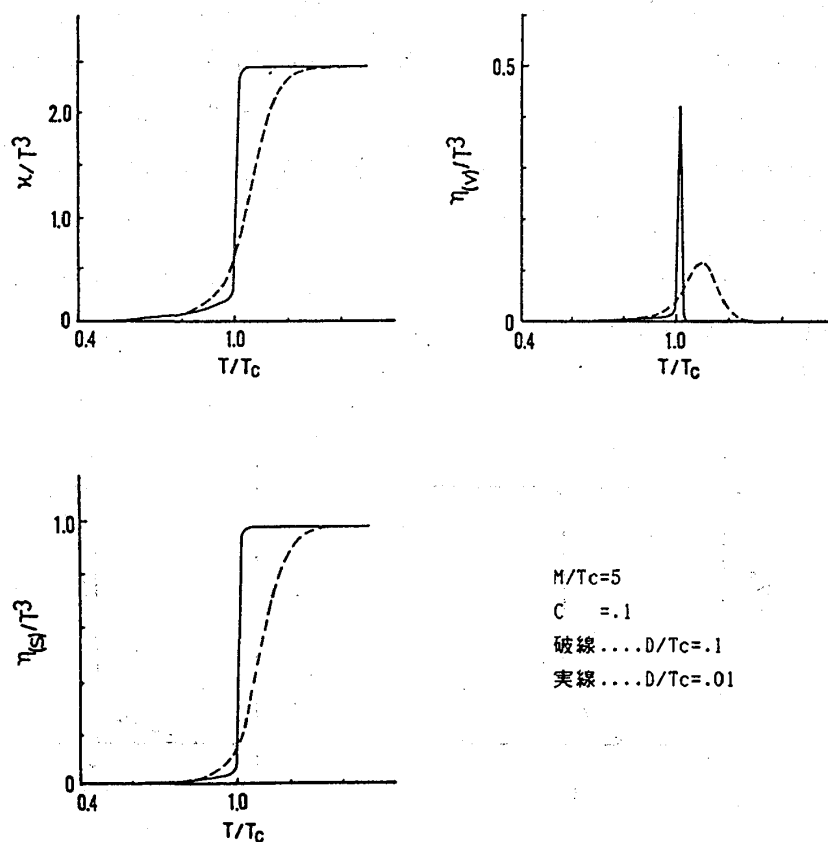


図2 輸送係数の温度依存性

すると

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (2-1)$$

で与えられる。ただし

$$\left. \begin{aligned} T_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu}^{(p)} + T_{\mu\nu}^{(v)} + T_{\mu\nu}^{(h)} \\ T_{\mu\nu}^{(p)} &= \varepsilon U_\mu U_\nu - p_S \Delta_{\mu\nu} \\ T_{\mu\nu}^{(v)} &= -(p - p_S) \Delta_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu} \\ T_{\mu\nu}^{(h)} &= q_\mu U_\nu + q_\nu U_\mu \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

さらに現象論的關係式は

$$\left. \begin{aligned} q_\mu &= -\kappa \Delta^\mu{}_\rho \left[ T \partial^\rho \frac{1}{T} + U^\sigma \partial_\sigma U^\rho \right] \\ \Pi_{\mu\nu} &= \frac{\eta^{(s)}}{2} \left[ \Delta_{\mu\rho} \Delta_{\nu\sigma} (\partial^\rho U^\sigma + \partial^\sigma U^\rho) - \frac{2}{3} \Delta_{\mu\nu} \Delta_{\rho\sigma} \partial^\rho U^\sigma \right] \\ (p - p_S) &= -\eta^{(v)} \partial_\rho U^\rho \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

である。(2-3)を用いて、(2-1)を適当な境界条件のもとで解くことが我々の問題である。

ここでは、特徴的な振舞を調べるために、モデルをできるだけ簡単化しよう。まず、時空を1+1次元とする。さらにBjorkenのスケーリング流体の仮定<sup>3)</sup>を用い、温度Tは固有時 $\tau$ のみの関数とする。またBjorkenの流体方程式の特解

$$U^\mu = \frac{x^\mu}{\tau} \quad (2-4)$$

を、粘性流体の場合にも“ansatz”として採用する。Bjorkenは完全流体の流体方程式を解いたわけだが、我々は、相転移の情報の入った粘性流体の方程式を、そのansatzの下で解こうというのである。

この場合、現象論的關係式(2-3)は

$$\left. \begin{aligned} \tilde{q}_\mu &= 0 \\ \tilde{\pi}_{\mu\nu} &= \frac{2}{3} \eta_{(s)} \frac{1}{\tau} \tilde{A}_{\mu\nu} \\ p - p_S &= -\eta_{(v)} \frac{1}{\tau} \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

となる。ここで $\sim$ をつけた量は、1+1次元のベクトルやテンソルを表わす。エネルギー運動量テンソルは

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \varepsilon \tilde{U}_\mu \tilde{U}_\nu - p_S \tilde{A}_{\mu\nu} + \tilde{A}_{\mu\nu} \left( \eta_{(v)} + \frac{2}{3} \eta_{(s)} \right) \frac{1}{\tau} \quad (2-6)$$

と書くことができる。(2-5)、(2-6)を用いて整理すると、流体方程式は

$$\frac{dT}{d\tau} = - \left( \frac{d\varepsilon}{dT} \right)^{-1} \left[ \frac{\varepsilon + p_S}{\tau} - \frac{\eta_{(v)} + \frac{2}{3} \eta_{(s)}}{\tau^2} \right] \quad (2-7)$$

となる。Bjorkenの解(2-4)は粘性流体の場合にも有効であったわけだ。近似は一切使っていない。

(2-7)を初期値問題として数値的に解けばよい。例えば $T_c = 200 \text{ MeV}$ ,  $M/T_c = 5$ ,  $d/T_c = 0.1$ ,  $c = 0.1$ とおき、初期時刻を $\tau_0 = 1 \text{ fm}$ 、初期温度を $T_0 = 300 \text{ MeV}$ とすると、図3のような結果が得られる。

この結果から、粘性の効果が温度Tの相転移点 $T_c$ への接近を遅らせること、相転移の存在が温度変化の $T_c$ におけるプラトーを与えることがわかる。この現象のくわしい分析は別の機会にゆずりたい。

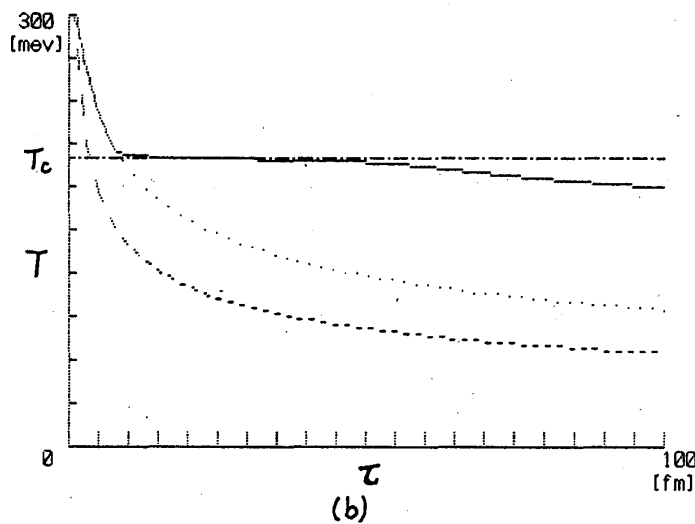
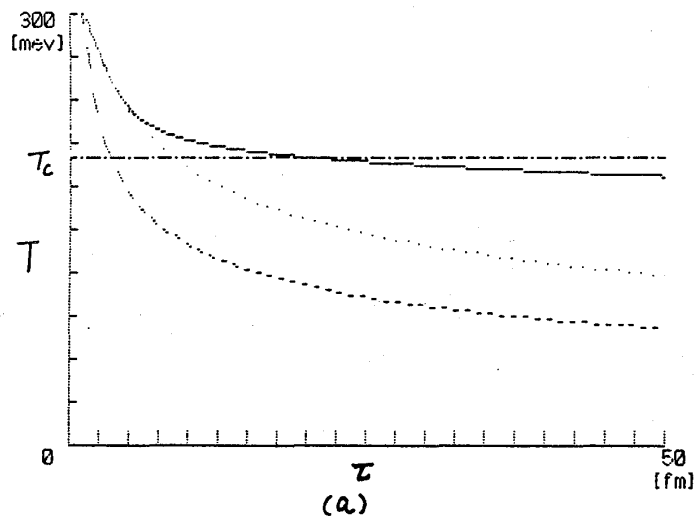
また、時刻 $\tau$ までの単位ラピディティあたりの総エントロピー生成量は、

$$\frac{d\Sigma^{\text{pro}}(\tau)}{dy} = \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \left( \frac{1}{T(\tau')} - \frac{\eta_{(v)} + \frac{2}{3} \eta_{(s)}}{\tau'} \right) \quad (2-8)$$

で与えられる。これについては別の機会に詳論したい。

さて、粘性などの散逸現象の効果を見るには、レイノルズ数を評価する必要がある。レイノルズ数の定義としては、まず

$$R = \left| \frac{A_{\mu\nu} T^{(p)\mu\nu}}{A_{\mu\nu} T^{(v)\mu\nu}} \right| = \frac{p_S}{\left( \eta_{(v)} + \frac{2}{3} \eta_{(s)} \right) \frac{1}{\tau}} \quad (2-9)$$



初期時刻 = 1 fm 初期温度 = 300 MeV とした場合の温度変化。ここで  $T_c = 200 \text{ MeV}$ ,  $M/T_c = 5$  とし、(a)  $d/T_c = 1$  の場合及び (b)  $d/T_c = 0.1$  の場合。  
実線が計算値、破線は完全流体の場合、点線は温度の3乗に比例した粘性がある場合。

図3 温度の時間変化

を採用することができるが、<sup>4)</sup> (2-7) における右辺の項の比

$$\sigma = \frac{\varepsilon + p_S}{\left( \eta(V) + \frac{2}{3} \eta(S) \right) \frac{1}{\tau}} \quad (2-10)$$

を使っても良い。先ほどのパラメーターの選択に対する (2-7) の数値解から、これらのレイノルズ数の時間変化を求めると、 $R^{-1}(\tau)$  も  $\sigma^{-1}(\tau)$  も初期近くの値 (オーダー1) から急速に小さくなっていくことがわかる。この場合の粘性の効果はそれほど大きくない。

我々はここで、Bjorken の ansatz を用いて 1+1 次元流体方程式を解いたが、粘性の影響と相転移の存在の効果として、クォーク・グルーオンプラズマ相の寿命は、従来考えられていたよりも長くなる可

能性を示す結果を得た。この事実は、クォーク・グルーオンプラズマ相からの信号を検出するという問題にとって重要であろう。数値解析についての分析は、現在進行中である。<sup>5)</sup>

## 参考文献

- 1) 並木美喜雄, 本研究会報告; 及びその文献3)
- 2) V. Canuto and S. H. Hsieh, *Nouvo Cimento* **48**, 189 (1978)
- 3) J. D. Bjorken, *Phys. Rev. D* **27**, 140 (1983)
- 4) C. Iso, K. Mori and M. Namiki, *Prog. Theor. Phys.* **22** 403 (1959)
- 5) S. Date, M. Mizutani, S. Muroya and M. Namiki 準備中。

## 「van Hove 極限」の補足 散逸系への移行に伴う「エントロピー生成」の構造

京大・理 長谷川 洋

「von Hove 極限」に関する一つの課題は、極限力学系を特徴付ける散逸性指標としての「エントロピー生成」がどのようにして可能となったのか、についての見解を確立することであろう。この問題について諸文献を調べてみると、未だ決定的な結果は提出されていないことがわかる。<sup>†</sup> 詳細均合を満たすマルコフ generator を用いて「エントロピー生成」がどのように与えられるかについては広く合意されているといってよい(前回報告「確率過程の方法による非平衡熱力学」素研74巻6号FIS参照)。すなわち全系を対象系  $S$  と熱浴  $R$  の直積とみて、部分系  $S$  に関する相対エントロピー(或る状態の定常 (= 平衡) 状態に関する)の時間微分である、とされる:

量子動力学半群  $\{A_t, t \in \mathbb{R}^+$  (完全正值, trace 保存型)  $\}$  の場合,<sup>3</sup> 対象系  $S$  の密度行列上に定義される generator  $L$  ( $A_t = e^{tL}$ ) を用い,

$$P \left( = \frac{d}{dt} \text{Tr} \rho_s(t) (-\log \rho_s(t) + \log \rho_{se}(t)) \right) \\ = \text{Tr} L \rho_s(t) (-\log \rho_s(t) + \log \rho_{se}(t)) \geq 0$$

(詳細均合の条件のもとに  $\rho_s(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \rho_{se}$  で、等号はその時に限り成立) というのが、それである。

<sup>†</sup> この問題はもちろん Boltzmann の H-定理に関する初期の論争<sup>1</sup> に端を発し、Prigogine らの非平衡熱力学 Lebowitz の古典非平衡統計力学へと続く<sup>2</sup>。Lebowitz の流れを汲んで問題を掘り下げた Spohn の論文<sup>3</sup> があげられるが。これは問題の提起の明確化にとどまるとみられ、Spohn のこれに続く力作<sup>4</sup> (ハミルトン系 → 散逸系へのスケール移行を総合的に論じたもの) ではむしろこの問題は取り上げられていない。最近の Lindblad<sup>5</sup>, Obcemea and Brandas<sup>6</sup> をみても、問題の核心に迫る意欲にも拘らず不透明である。またいわゆる 'thermo field dynamics' において散逸性を取り入れる試みが提出されている<sup>7</sup> が、未だ論評の段階に至っていないと思われる。